

Estimación de filamentos no plano mediante o uso da envoltura r -convexa. Aplicación a datos LiDAR

Héctor González-Vázquez, Beatriz Pateiro-López, Alberto Rodríguez-Casal

hector.gonzalez@usc.es

Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización.
Universidade de Santiago de Compostela (USC)

XII Xornada de Usuarios de R en Galicia

Santiago de Compostela, 16 de outubro de 2025



CENTRO DE INVESTIGACIÓN
E TECNOLOXÍA MATEMÁTICA
DE GALICIA



XUNTA
DE GALICIA

CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN,
CIENCIA, UNIVERSIDADES E
FORMACIÓN PROFESIONAL



MINISTERIO
DE CIENCIA, INNOVACIÓN
Y UNIVERSIDADES



AGENCIA
ESPAÑOLA DE
EVALUACIÓN DE
INVESTIGACIÓN

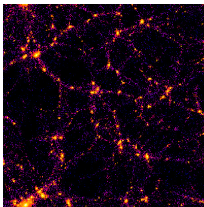
Project PID2020-116587GB-I00 granted by:

Estimación de filamentos

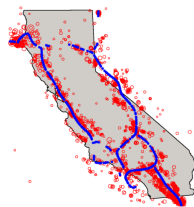
Estruturas filamentosas onde as observacións se distribúen arredor de curvas ou filamentos, pero non exactamente neles.

Estimación de filamentos: reconstruír ou estimar a curva ou filamento que subxace aos datos.

- ▶ Cosmoloxía: materia do universo na rede cósmica, protuberancias na superficie do Sol.
- ▶ Sismoloxía: terremotos arredor das fallas xeolóxicas.
- ▶ Imaxe médica: vasos sanguíneos, neurofilamentos.
- ▶ Detección remota: cursos fluviais, redes de estradas.
- ▶ ...



Rede cósmica.
(Yusofi *et al.*, 2019)



Terremotos na falla de San Andrés, California.
(Li e Ghosal, 2020)

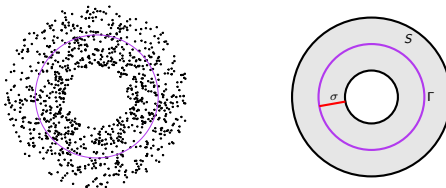
Modelo de ruído en estimación de filamentos

Caso particular do [modelo de ruído](#) estudado por Genovese *et al.* (2012-JMLR).

- ▶ $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ é un **filamento** pechado (sen extremos) no plano.
- ▶ A mostra $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathbb{R}^2$ é unha mostra aleatoria simple.
 - Os puntos X_i están “preto” do filamento: o seu **soporte** S é unha **dilatación** do filamento

$$S = \Gamma \oplus \sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, \Gamma) \leq \sigma\}.$$

- O parámetro $\sigma > 0$ coñécese como **nivel de ruído**.



Genovese, C. R., Perone-Pacifico, M., Verdinelli, I., e Wasserman, L. (2012-JMLR)

Minimax manifold estimation

J. Mach. Learn. Res., 13(43):1263–1291

O estimador proposto - Paso 1

- ▶ Genovese *et al.* (2012-JASA) propuxeron estimar Γ co chamado **estimador EDT**.
- ▶ Nós propoñemos unha mellora $\longrightarrow$ o **estimador EDT con envoltura r -convexa**: $\hat{\Gamma}$.



Genovese, C. R., Perone-Pacifico, M., Verdinelli, I., e Wasserman, L. (2012-JASA)

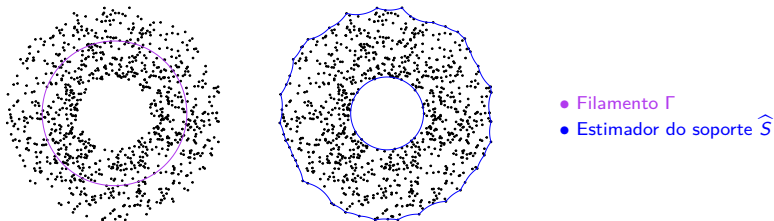
The geometry of nonparametric filament estimation

J. Am. Stat. Assoc., 107(498):788–799

O estimador proposto - Paso 1

- ▶ Genovese *et al.* (2012-JASA) propuxeron estimar Γ co chamado **estimador EDT**.
- ▶ Nós propoñemos unha mellora $\rightarrow$ o **estimador EDT con envoltura r -convexa**: $\hat{\Gamma}$.

PASO 1: Estimar o soporte S mediante un **estimador $\hat{S}$** .



Que estimador $\hat{S}$ empregamos? $\rightarrow$ a **envoltura r -convexa** da mostra



Genovese, C. R., Perone-Pacifico, M., Verdinelli, I., e Wasserman, L. (2012-JASA)

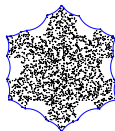
The geometry of nonparametric filament estimation

J. Am. Stat. Assoc., 107(498):788–799

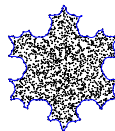
A envoltura r -convexa da mostra

Estimador do soporte:
envoltura r -convexa da mostra ($r > 0$)

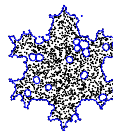
$$\hat{S}_n = C_r(\mathcal{X}_n) = \bigcap_{\tilde{B}(y,r) \cap \mathcal{X}_n = \emptyset} \tilde{B}(y,r)^c.$$



$r = 0.2$



$r = 0.05$



$r = 0.025$

- ▶ A **envoltura r -convexa** xeneraliza á **envoltura convexa** e proporciona un estimador **máis flexible**.
 - Substituímos hiperplanos separadores (envoltura convexa) por bólas abertas de raio r .
 - Intuición: unha bóla de raio r roda por fóra da mostra.
- ▶ Elección axeitada do **parámetro de forma $r > 0$** .



Rodríguez-Casal, A. (2007)

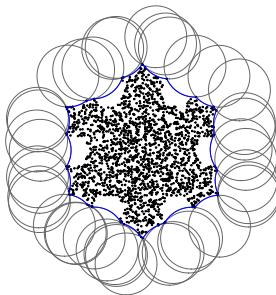
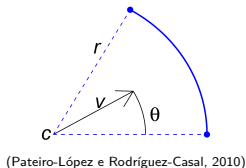
Set estimation under convexity type assumptions

Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Statist., 43(6):763–774

Envoltura r -convexa en R: paquete alphahull

Paquete `alphahull` (Pateiro-López e Rodríguez-Casal, 2010).

- ▶ `alphahull::ahull()` → envoltura r -convexa dun conxunto de puntos no plano.
- `$arcs` → a fronteira da envoltura r -convexa está formada por arcos de raio r (salvo posibles puntos illados). Devólvense os elementos que definen cada arco, como o centro, raio, vector unitario e ángulo.



Pateiro-López, B. e Rodríguez-Casal, A. (2010)

Generalizing the convex hull of a sample: the R package alphahull

J. Stat. Softw., 34(5):1–28

Función **EDT** (*Euclidean Distance Transform*):

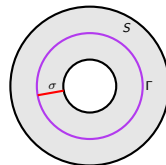
$$\Lambda(y) = d(y, \partial S).$$

- ▶ O filamento Γ maximiza a EDT ao longo do soporte S .
- ▶ O máximo é o nivel de ruído σ .

Teorema (Genovese *et al.*, 2012-JASA)

Baixo o modelo de ruído,

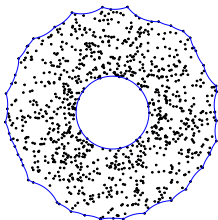
$$\Gamma = \{y \in S: d(y, \partial S) = \sigma\}.$$



Genovese, C. R., Perone-Pacifico, M., Verdinelli, I., e Wasserman, L. (2012-JASA)
The geometry of nonparametric filament estimation
J. Am. Stat. Assoc., 107(498):788–799

PASO 2:

- ▶ Estimar a EDT $\Lambda(y) = d(y, \partial S)$ mediante a EDT empírica $\hat{\Lambda}(y) = d(y, \partial \hat{S})$ (*plug-in*).
- ▶ Estimar o nivel de ruído $\sigma = \max_{y \in S} \Lambda(y)$ mediante $\hat{\sigma} = \max_{y \in \hat{S}} \hat{\Lambda}(y)$.



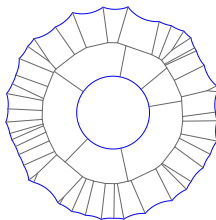
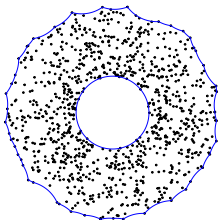
- Envoltura r -convexa $\hat{S}$

PASO 2:

- ▶ Estimar a EDT $\Lambda(y) = d(y, \partial S)$ mediante a EDT empírica $\hat{\Lambda}(y) = d(y, \partial \hat{S})$ (*plug-in*).
- ▶ Estimar o nivel de ruído $\sigma = \max_{y \in S} \Lambda(y)$ mediante $\hat{\sigma} = \max_{y \in \hat{S}} \hat{\Lambda}(y)$.

Implementación en R:

- ▶ Obter o *medial axis* de $\hat{S} \rightarrow M(\hat{S}) = \{\text{puntos de } \hat{S} \text{ con máis dunha proxección sobre } \partial \hat{S}\}$.
 - O *medial axis* da envoltura *r*-convexa está formado por segmentos.
(`alphahull::delvor()` $\rightarrow$ diagrama de Voronoi)
- ▶ Calcular $\hat{\sigma}$ como a máxima distancia de $M(\hat{S})$ a $\partial \hat{S}$.

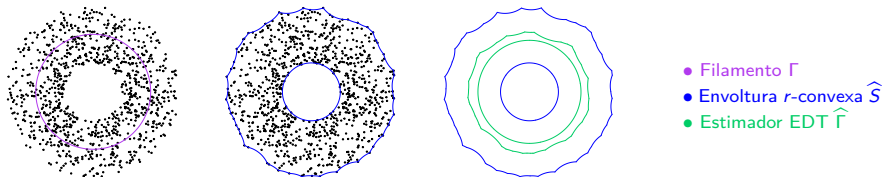


- Envoltura *r*-convexa $\hat{S}$
- Medial axis $M(\hat{S})$

PASO 3: Estimar o filamento co **estimador EDT con envoltura r -convexa**

$$\hat{\Gamma} = \{y \in \hat{S} : d(y, \partial\hat{S}) \geq \hat{\sigma} - \delta\}.$$

- ▶ O estimador $\hat{\Gamma}$ consiste en **contraer $\hat{S}$ cara adentro**.
- ▶ O parámetro $\delta \in (0, \hat{\sigma})$ regula canto contraemos (menor δ , máis delgado $\hat{\Gamma}$).

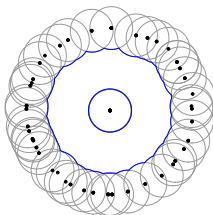


O estimador proposto - Paso 3 (II)

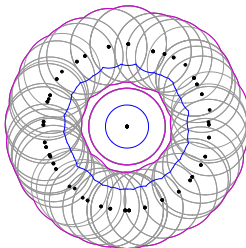
$$\hat{\Gamma} = \{y \in \hat{S} : d(y, \partial \hat{S}) \geq \hat{\sigma} - \delta\}.$$

Implementación en R:

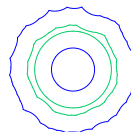
- ▶ Partir dos centros dos arcos que definen $\partial \hat{S}$ (de raio r) e expandilos obtendo novos arcos de raio $r + \hat{\sigma} - \delta$.
 - `alphahull::dw()` → Estimador de Devroye-Wise (unión de bólas dun certo raio).
- ▶ Comprobar cales destes novos arcos están dentro de $\hat{S}$.
 - `alphahull::inahull()`
→ Determina se un ou varios puntos están dentro da envoltura r -convexa.



• Envoltura r -convexa $\hat{S}$



• Devroye-Wise dos centros dos arcos



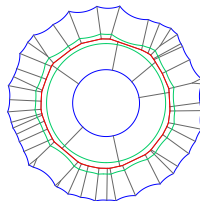
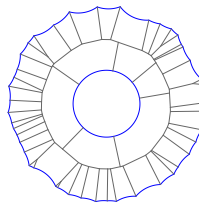
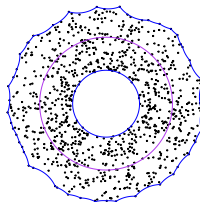
• Estimador EDT $\hat{\Gamma}$

Paso extra - Extraer unha curva do estimador EDT

Curva extraída: curva contida dentro do estimador EDT $\hat{\Gamma}$ que tamén estima o filamento Γ .

- ▶ A curva está formada polos segmentos do *medial axis* $M(\hat{S})$ que están completamente contidos en $\hat{\Gamma}$.

- Filamento Γ
- Envoltura r -convexa $\hat{S}$
- Medial axis $M(\hat{S})$
- Estimador EDT $\hat{\Gamma}$
- Curva extraída

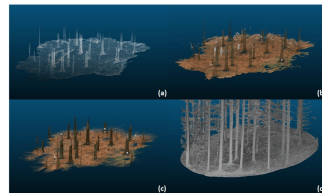


Aplicación a datos LiDAR (I)

- ▶ En inventario forestal, as **seccións transversais dos troncos das árbores** proporcionan información e medidas importantes sobre as mesmas.
 - Por exemplo, permiten estimar o diámetro da árbore á altura do peito (dbh).

- ▶ Nubes de puntos 3D da zona de interese obtidos mediante sistema de detección remota **LiDAR** (*Light Detection And Ranging*).

- Formato de arquivo LAS (LASer)
→ extensións .las / .laz
- Datos obtidos cunha aplicación de iPad.



(Gollob et al., 2021)

- ▶ Paquete **lidR** (Roussel et al., 2020).
 - Procesar e analizar este tipo de datos, principalmente ALS (*Airborne Laser Scanning*).
 - Énfase nas aplicacións en ecoloxía e ambientais.

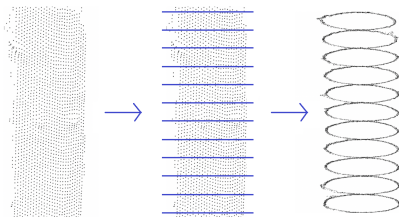


Roussel, J. et al. (2020)

lidR: An R package for analysis of Airborne Laser Scanning (ALS) data
Remote Sens. Environ., 251:112061

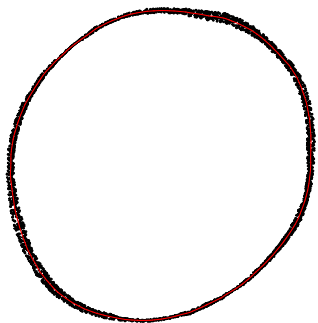
Aplicación a datos LiDAR (II)

- ▶ Ler e gardar as coordenadas X, Y, Z da nube de puntos 3D.
 - `lidR::readLAS()` → ler arquivo .las / .laz a un obxecto de clase LAS.
- ▶ Seleccionar os puntos da nube que pertencen a unha árbore.
 - Filtramos os puntos con coordenadas X, Y nun círculo con centro no tronco
→ `lidR::clip_circle()`
- ▶ Obter unha **sección transversal 2D** do tronco.
 - Filtrar puntos con coordenada Z nun intervalo pequeno (5cm)
→ `lidR::filter_poi()`
 - Quedámonos só coas coordenadas X, Y (sección 2D).

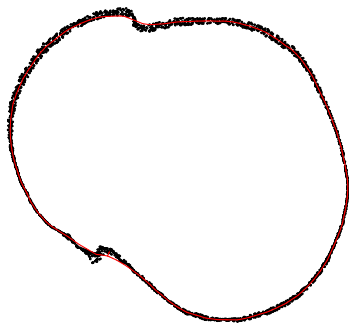


(Eto *et al.*, 2020)

Estimamos o contorno das seccións transversais co **estimador EDT con envoltura r -convexa**.



• Curva extraída



$r = 0.1$

$\delta = 0.97\hat{\sigma}$

Grazas pola atención!

Héctor González-Vázquez – hector.gonzalez@usc.es

O primeiro autor agradece o apoio económico da axuda de apoio á etapa predoutoral da Xunta de Galicia ED481A-2025-173, cofinanciada parcialmente pola Unión Europea no marco do programa FSE+ Galicia 2021-2027. Este traballo é parte do proxecto de I+D+i PID2020-116587GB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 e do proxecto ED431C 2025/03 financiado pola Consellería de Educación, Ciencia, Universidades e Formación Profesional.



Project PID2020-116587GB-I00 granted by:



Estimación de filamentos no plano mediante o uso da envoltura r -convexa. Aplicación a datos LiDAR

Héctor González-Vázquez, Beatriz Pateiro-López, Alberto Rodríguez-Casal

hector.gonzalez@usc.es

Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización.
Universidade de Santiago de Compostela (USC)

XII Xornada de Usuarios de R en Galicia

Santiago de Compostela, 16 de outubro de 2025



CENTRO DE INVESTIGACIÓN
E TECNOLOXÍA MATEMÁTICA
DE GALICIA



XUNTA
DE GALICIA

CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN,
CIENCIA, UNIVERSIDADES E
FORMACIÓN PROFESIONAL



MINISTERIO
DE CIENCIA, INNOVACIÓN
Y UNIVERSIDADES



AGENCIA
ESPAÑOLA DE
EVALUACIÓN DE
INVESTIGACIÓN

Project PID2020-116587GB-I00 granted by: