PROGRAMAÇÃO LINEAR NO PLANO: UMA PROPOSTA UTILIZANDO GGPLOT2

in:X Xornada de Usuarios de R en Galicia

Luciane Ferreira Alcoforado

Academia da Força Aérea Brasileira

outubro de 2023

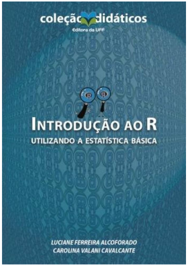
Roteiro

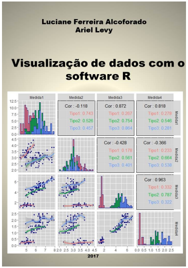
- Que hacemos
- Introducción
  - Estrutura Matemática de um PPL
- Objetivos
- Aplicaciones
- Resultados
- Consideraciones finales

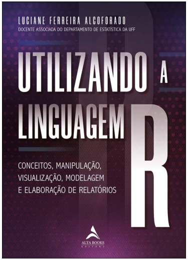
Quem Sou

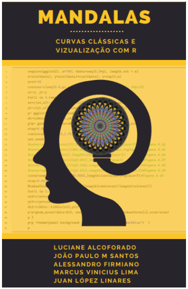
- Licenciada em Matemática (UFSM) com mestrado em Engenharia de Sistema e Computação (UFRJ) e doutorado em Engenharia Civil (UFF).
- Professora atuante há mais de 20 anos na área de Matemática e Estatística: UFF ✍ & AFA ✈.
- ♥ Apaixonada ❤ pela linguagem ❥ R.
- Iniciante no desenvolvimento de pacotes e alguma experiência em aplicativos shiny ✐.

Disseminação de R na comunidade: Livros e Seminários





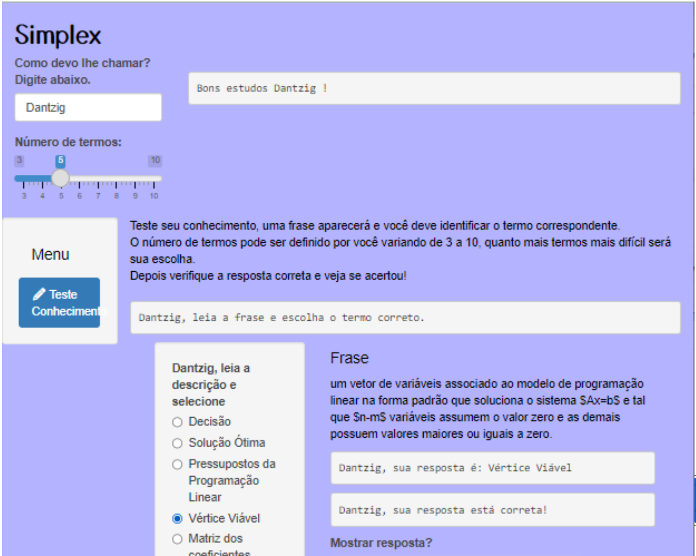




Projeto de Pesquisa: Aplicativo Web para ensino do método Simplex

- Desenvolver um objeto de aprendizagem na forma de aplicativo web destinado ao ensino do método Simplex.
- Início: Abril de 2023 (Portaria AFA n. 87/SPPC)
- Resultados parciais:
  - https://rpubs.com/LucianeA/Simplex-glossario - 40 termos.
  - Versão parcial App: https://lucianefalcoforado.shinyapps.io/Teste_Termos/
  - Códigos em R para **Método Gráfico com ggplot2**

Visão do App Teste Termos



Nova Versão

Incorporar o método gráfico ao App.

Introdução

PPL (Problema de Programação Linear): tipo de problema de otimização que busca encontrar a melhor solução possível em situações que envolva recursos limitados e um objetivo definido.

- Estrutura Matemática composta de uma função objetivo e um conjunto de m restrições, em que todas as relações são **lineares**.
- Função Objetivo: $Otimizar\ z = c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n$.
- Restrições: $R_i : a_{i1} \cdot x_1 + ... + a_{in} \cdot x_n \{\leq = \geq\} b_i,\ i = 1, 2, ..., m$.
- Variáveis de Decisão: $x_1, x_2, ..., x_n$, o que se quer determinar, são as incógnitas do problema.
- Parâmetros: $c_j \in R,\ a_{ij} \in R,\ b_i \in R,\ i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$

Objetivo

- Propor uma forma didática de abordar o entendimento do método da solução gráfica para um PPL.

Método Gráfico

- Recurso visual que permite representar o PPL quando há duas variáveis de decisão.
- Permite obter graficamente as soluções viáveis e a solução ótima quando estas existirem.

Passos do Método Gráfico

- Identificar as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições do problema.
- Definir uma escala adequada para os eixos x e y.
- Traçar as retas correspondentes às restrições
  - usando os coeficientes das variáveis e os termos independentes das inequações.
- Identificar a região factível,
  - que é o conjunto de pontos que satisfazem todas as restrições, pode ser um polígono convexo, um semiplano, um ponto ou um conjunto vazio.
- Traçar o vetor gradiente e as curvas de nível perpendiculares.
- Obter a solução ótima:
  - Mover as curvas de nível na direção que maximiza ou minimiza a função objetivo, até que ela toque o último ponto da região factível. Esse ponto é a solução do problema determinando o valor ótimo da função objetivo.

Limitações do uso do Método Gráfico

- Restrito a problemas com **duas** variáveis de decisão.
- Necessidade de obter todos os vértices do problema.
- Dificuldade em visualizar a região viável e traçar as curvas de nível.

Vantagens do uso do Método Gráfico

- Ajudar a entender melhor o problema de otimização.
- Compreeder o funcionamento do sistema de busca pela solução ótima.
- Visualizar mais claramente as soluções possíveis e as restrições do problema.

Dificuldades no uso do Método Gráfico

- Dificuldade em construir manualmente gráficos precisos.
- Definir uma escala adequada.
- Representar as curvas de nível perpendiculares ao vetor gradiente.

Proposta usando ggplot2

- **ggplot2:** pacote R mais conceituada para visualizacao gráfica de dados.
  - permite construir gráficos complexos a partir de componentes simples e padronizados.
  - oferece uma grande variedade de formas geométricas, escalas, temas e extensões que facilitam a personalização do gráfico à necessidade do usuário.
  - ampla documentação disponível para consulta.

Desafios da proposta

- Conceituais: ligação entre o método gráfico e os recursos do ggplot2
- Técnicos: domínio computacional da linguagem R
- Pedagógicos: Estratégias didáticas para uso dos recursos computacionais.

Explorando os recursos do ggplot2

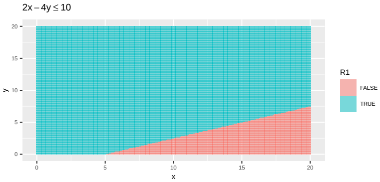
Para resolver um problema de PL no plano, considera-se o número de variáveis de decisão n=2 e o número de restrições m $>$ 1.

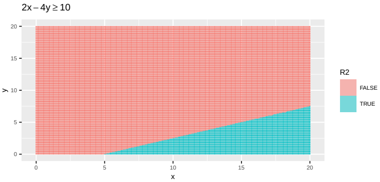
Cada restrição do problema contém a igualdade, o que significa que uma reta será representada graficamente para cada restrição.

Tipos de Restrições

1) $2x - 4y \leq 10$
2) $2x - 4y \geq 10$
3) $2x - 4y = 10$

Cada restrição divide a região do plano em Viável (TRUE) e Não Viável (FALSE).

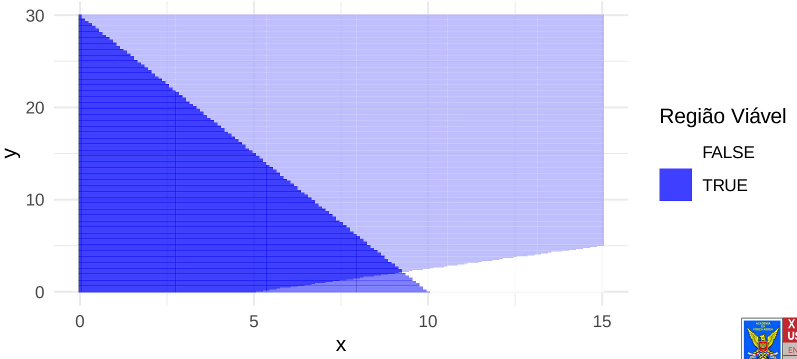




Representando duas restrições

R1: $2x - 4y \leq 10$

R2: $3x + y \leq 30$

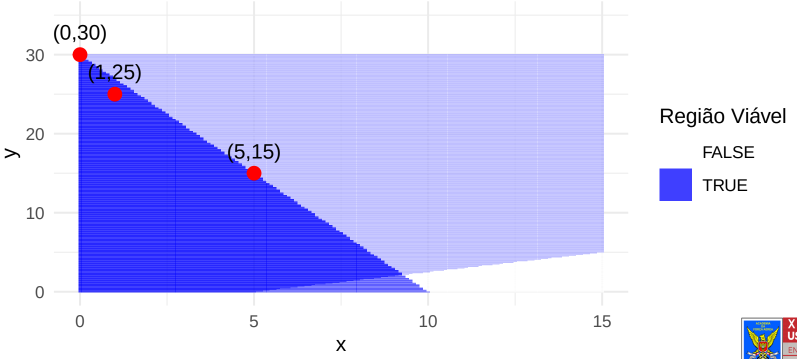


X XORNADA DE USUARIOS DE R EN GALICIA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS (USC)
18 OUTUBRO 2023

Obtendo soluções viáveis

R1: $2x - 4y \leq 10$

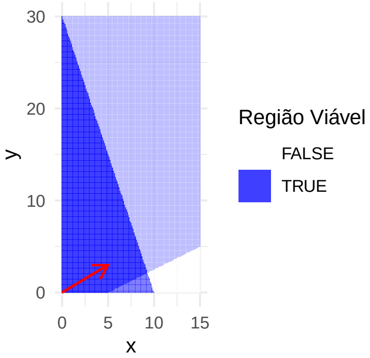
R2: $3x + y \leq 30$



Como representar a função objetivo graficamente?

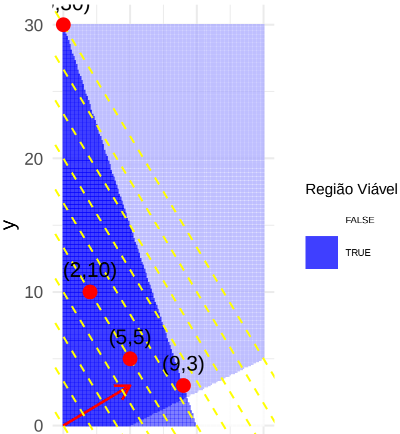
função objetivo: $max\ z = 5x + 3y \rightarrow$ vetor gradiente $= (5, 3)$

No sentido do gradiente a função objetivo aumenta de valor; no sentido contrário diminui.



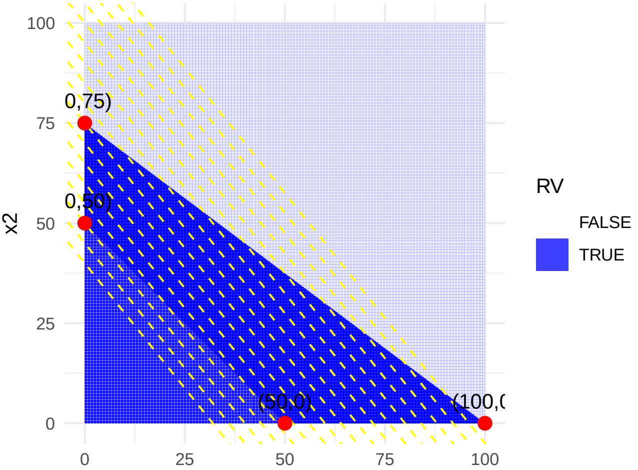
Curvas de nível x solução ótima

Curvas de nível perpendiculares ao vetor gradiente. $z = 5x + 3y$.
(5,5) e (2,10) $\rightarrow z = 40$. Já (9,3) $\rightarrow z = 54$ e (0,30) $\rightarrow z^* = 90$.



Propondo exercícios para os alunos

$$min\ z = 10x_1 + 8x_2$$



X XORNADA DE USUARIOS DE R EN GALICIA
18 OUTUBRO 2023

Dados do problema

```
lim_x=100;lim_y=100;a11=1;a12=1;a21=3;a22=4;b1=50;b2=300
x_vals <- seq(0, lim_x, by = 0.1) # Valores de x
y_vals <- seq(0, lim_y, by = 0.1) # Valores de y
data <- expand.grid(x = x_vals, y = y_vals)
data$ineq1 <- (a11 * data$x + a12 * data$y) >= b1
data$ineq2 <- (a21 * data$x + a22 * data$y) <= b2
dim(data); data[c(1,2000,999999),]
```

```
## [1] 1002001       4
```

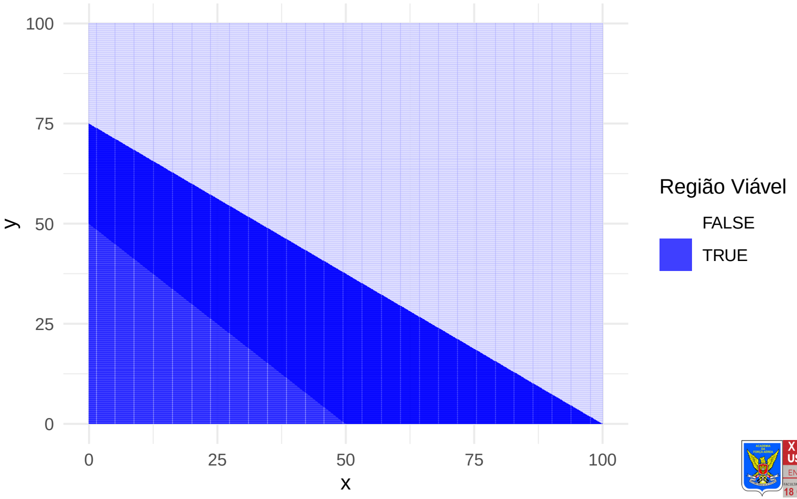
```
##            x    y ineq1 ineq2
## 1        0.0  0.0 FALSE  TRUE
## 2000    99.8  0.1  TRUE  TRUE
## 999999 100.0 99.8  TRUE FALSE
```

O gráfico

geom_tile produz sobreposição de cores para produzir região viável.

```
p = ggplot(data, aes(x = x, y = y)) +
  geom_tile(aes(fill = ineq1), alpha = 0.5) +
  geom_tile(aes(fill = ineq2), alpha = 0.5) +
  scale_fill_manual(values = c("white", "blue"),
                    name = "Região Viável") +
  coord_cartesian(xlim = c(0, lim_x),
                  ylim = c(0, lim_y)) +
  labs(title = "", x = "x", y = "y") +
  theme_minimal()
```

Visualizando o gráfico



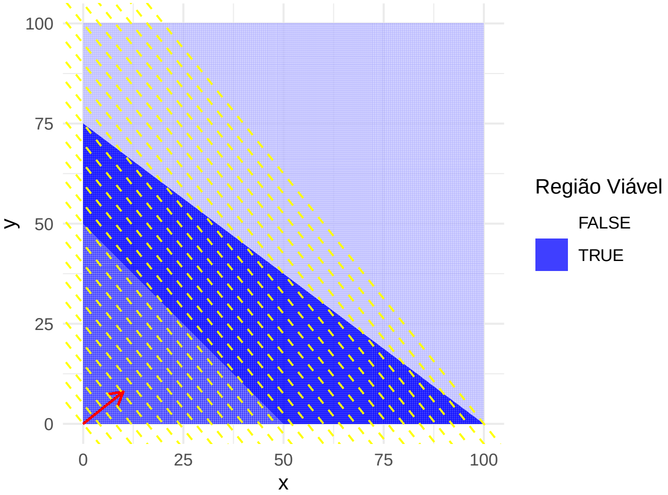
Vetor Gradiente e Curvas de nível

geom_segment produz vetor gradiente e *geom_abline* produz curvas de nível.

```
c1 = 10; c2 = 8; lim_z = c1*lim_x
z_data <- data.frame(z = seq(0,lim_z, by = 40))
calc_intercept <- function(z) { return(z / c2) }
z_data$intercept <- sapply(z_data$z, calc_intercept)

p + geom_segment(aes(x = 0, y = 0, xend = c1, yend = c2),
                 arrow = arrow(length = unit(0.3, "cm")), c
  geom_abline(data = z_data, aes(intercept = intercept,
                                 slope = -c1/c2),
               linetype = "dashed", color = "yellow")+
coord_fixed(ylim = c(0, lim_x))
```

Visualizando o gráfico



X XORNADA DE USUARIOS DE R EN GALICIA
18 OUTUBRO 2023

Função para obter pontos de intersecção (vértices)

Nem todos os pontos pertencem à região viável, porém é possível realizar uma filtragem para obtê-los. Depois, cria-se nova camada no gráfico para inserir os vértices viáveis.

```
matriz = cbind(a1=c(a11,a21,1,0), a2=c(a12,a22,0,1),
               b=c(b1,b2,0,0))
intersecao <- c()
for (i in 1:(nrow(matriz)-1)) {
 for (j in (i+1):nrow(matriz)) {
 det <- det(matrix(c(matriz[i,1], matriz[i,2], matriz[j,1],
 if (det != 0) {
 x1 <- det(matrix(c(matriz[i,3], matriz[i,2], matriz[j,3],
 x2 <- det(matrix(c(matriz[i,1], matriz[i,3], matriz[j,1],
 intersecao <- c(intersecao, c(x1,x2))
 } } }
```

Conclusão

Apresentou-se

- uma proposta de ensino e aprendizagem de Programação Linear (PL) usando o pacote ggplot2;
- conceitos básicos de PL e passos do Método Gráfico;
- como aplicar os recursos do ggplot2 para realizar os passos do Método Gráfico;
- As vantagens, dificuldades e desafios a serem enfrentados no emprego desta proposta.

Espera-se

- Adaptar os recursos desenvolvidos com ggplot2 no App em desenvolvimento.

Agradecimentos

- Agradeço ao comitê organizador da X Xornada de Usuários de R en Galicia pela chance de apresentar.
- Sou grata à Academia da Força Aérea por viabilizar este trabalho.
- Obrigada aos presentes na Xornada pela atenção dispensada.
- contato: lucianea@id.uff.br

X XORNADA DE USUARIOS DE R EN GALICIA 18 OUTUBRO 2023

Referências

[1] ALCOFORADO, L.F. (2021), Utilizando a Linguagem R: conceitos, manipulação, visualização, modelagem e elaboração de relatórios. Rio de Janeiro: Alta Books.

[2] ARENALES, M. ET. AL. (2011), Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Elsevier ABEPRO.

[3] BELFIORE, P., FÁVERO, L.P. (2012), Pesquisa operacional para cursos de administração,contabilidade e economia. Rio de Janeiro: Elsevier.

[4] WICKHAM, H. (2016). ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis. Springer-Verlag New York